CONCOURS D'ENTREE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 28 avril 1993

EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures - coefficient : 8

Le sujet comporte 4 pages

N . B : Le sujet comprend 3 parties, qui ne sont pas indépendantes.
Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Pour chaque question de ce problème, on appellera *"solution convenable"* toute suite finie d'affirmations *correctement justifiées*, et *très lisiblement écrites.*
Seules les *"solutions convenables"* seront notées positivement.
Il sera tenu le plus grand compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.

Notations :

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{R}$ le corps des réels.

Dans ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes.

L'exponentielle de x pourra être notée indifféremment e^x ou $\exp(x)$.

Partie I :

1°) Soit a un réel positif ou nul, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = a \text{ , et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n)^{\frac{1}{3}} \qquad (1)$$

Montrez que la suite (u_n) est convergente, et précisez sa limite suivant les valeurs du réel a.

2°) Soit G la partie de E formée des fonctions f qui vérifient la relation :

$$\forall\, x \in [0,+\infty[,\ f(x^3) = f(x) \qquad (2)$$

Montrez que G est un sous-espace vectoriel de E.
Quels sont ses éléments ?

3°) Soit f une fonction quelconque de E, et g la fonction définie par :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \frac{1}{x}\int_x^{x^3} f(t)\,dt \qquad (3)$$

Montrez que g est prolongeable par continuité en 0. On notera également g ce prolongement, défini sur $[0,+\infty[$.
Précisez la valeur de g(0), en fonction de la fonction f.

4°) Soit ϕ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction g de E définie au 3°) .

a) Montrez que ϕ est un endomorphisme de E
b) Soit φ la restriction de ϕ au sous-espace vectoriel F de E.
Montrez que φ est un endomorphisme de F.
L'application φ est-elle injective ?
L'application φ est-elle surjective ?
c) L'application ϕ est-elle injective ?
L'application ϕ est-elle surjective ?

5°) a) Montrez que pour toute fonction f de E, la fonction $g = \phi(f)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et donnez une expression de la dérivée g'(x).

b) On suppose que la fonction f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. La fonction g est-elle dérivable à droite en 0 ? Dans l'affirmative, donnez la valeur de g'(0).

c) On suppose que la fonction f est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$. La fonction $g = \phi(f)$ est-elle de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$?

Partie II:

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction $g = \phi(f)$ dans le cas où la fonction f est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \qquad (4)$$

1°) a) Montrez que la fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$, et donnez l'expression de sa dérivée $g'(x)$.

b) Montrez que la fonction g est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

2°) a) Démontrez les inégalités :

$$\forall x \in\ ]0,1],\ g'(x) > 0 \qquad (5)$$

$$\forall x \in [\sqrt{2}, +\infty[,\ g'(x) < 0 \qquad (6)$$

Pour démontrer l'inégalité (6), on pourra étudier les variations de la fonction u définie par :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ u(x) = 3x^2 \exp\left(\frac{x^2 - x^6}{2}\right) - 1 \qquad (7)$$

ou utiliser toute autre méthode.

b) Déduisez-en que la fonction dérivée g' s'annule sur l'intervalle $]1,\sqrt{2}[$. Montrez que la fonction g' s'annule pour une seule valeur sur cet intervalle.

3°) a) Déterminez la limite de la fonction g en $+\infty$.

b) Déterminez un équivalent g_1 de la fonction g au voisinage de $+\infty$. de la forme :

$$g_1(x) = a\, x^b\, f(x) \qquad (8)$$

où a et b sont deux constantes réelles à expliciter.

c) Déterminez la limite de la fonction g' en $+\infty$.

d) Déterminez un équivalent simple de la fonction g' au voisinage de $+\infty$.

4°) Tracez la courbe représentative de la fonction g par rapport à un repère affine orthonormal. On prendra l'unité de longueur égale à 5 cm.

Partie III:

Dans cette partie, g désigne toujours la fonction définie dans la partie II.

1°) Soit h la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, h(x) = x - 1 - g(x) \qquad (9)$$

a) Soit b un réel de l'intervalle]0,1[, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$v_0 = b \text{ , et } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = h(v_n) \qquad (10)$$

Montrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et prend ses valeurs dans l'intervalle]0,1[.

b) Montrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et précisez sa limite l_1.

2°) a) Déterminez le réel α tel que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = (v_n)^\alpha - (v_{n-1})^\alpha \qquad (11)$$

converge vers une limite finie non nulle l_2, et précisez alors la valeur de l_2.

b) Soit alors, avec les conditions du a), $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_n = \sum_{k=1}^{n} w_k \qquad (12)$$

Donnez un équivalent de t_n quand l'entier n tend vers $+\infty$.
Déduisez-en un équivalent de v_n quand l'entier n tend vers $+\infty$.

3°) a) On considère la série entière de terme général $y_n(x)$ défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y_n(x) = v_n x^n \qquad (13)$$

Déterminez la nature de cette série suivant les valeurs du réel x.

b) Montrez que cette série entière converge uniformément sur le segment $[-1, 0]$.

c) Montrez que cette série entière converge uniformément sur tout segment de la forme $[-1, c]$, où c appartient à un ensemble de réels que l'on précisera.

FIN DE L'ENONCE